Cálculo. Tema 1

ETSII- GITI

Ejercicio Propuesto nº 1

Puedes ver el ejercicio resuelto en nuestro canal de YouTube
o entrando en nuestra página web: Academia-M21

Ejercicio 1a

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Solución 1. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 0$

$$1 = \frac{1 - r}{1 - r} = 1$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n + 1$, es decir:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

  Como estamos suponiendo que se cumple que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad \textbf{hipótesis de inducción}$$

  la primera expresión puede escribirse como

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

  Con lo que queda demostrado.

Otra forma de demostrarlo, observamos que:

[style=D]X^3 $- Y^3X - Y[style = D]X^4 - Y^4X - Y[style = D]X^5 - Y^5X - Y$ y en general

tenemos que

$$\frac{X^n - Y^n}{X - Y} = X^n + YX^{n-1} + Y^2x^{n-2} + \cdots + Y^n = \sum_{k=0}^{n} X^{n-k}Y^k$$

Si hacemos $X = 1$, e $Y = r$ tenemos que=

$$\frac{1 - r^n}{1 - r} = 1 + r + r^{+} \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

Ejercicio 1b

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solución 2. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot (2)}{2} = 1$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n + 1$, es decir:

$$1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  Como estamos suponiendo que se cumple que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \textbf{hipótesis de inducción}$$

  la primera expresión puede escribirse como

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  Con lo que queda demostrado.

Ejercicio 1c

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Solución 3. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Ejercicio 1d

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solución 4. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio 1e

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Solución 5. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$1^3 = \frac{1(1+1)^2}{4} = 1$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \end{aligned}$$

Ejercicio 1f

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Solución 6. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2 = 2 + (1-1)2^2 = 2$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} = 2 + (n-1)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} = 2 + 2n2^{n+1} = 2 + n2^{n+2}$$

Ejercicio 1g

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Solución 7. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Ejercicio 1h

Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$$

Solución 8. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} kk! = 1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{n+1} kk! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kk! &= \sum_{k=1}^{n} kk! + (n+1)(n+1)! = \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = \\
&= (n+1)!(1+n+1) - 1 = \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 = \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$